

连续空间离散时间—Riccati 传递矩阵积分法

西安工业学院 顾致平 西北工业大学 陈松淇

【摘要】 本文提出了分析非线性转子—支承系统瞬态响应的一种传递矩阵积分法, 它借助 Newmark 差分公式, 建立传递关系, 使用的传递向量是 $\{f \cdot e\}^T$, 而不是以往的 $\{f \cdot e\}^T$; 它用 Riccati 法计算的是各站位的加速度, 而不是以往的位移, 提高了方法的数值稳定法。本法具有 Riccati 法的优点, 尤其适合于计算含有非线性元件的复杂转子系统的瞬态响应。

一、前 言

在研究转子系统的动力特性时, 常使用传递矩阵法求解复杂系统的临界转速、振型、不平衡响应和分析系统的稳定性。文献 [1~3] 给出了分析线性转子系统瞬态响应的一类近似方法, 即用有限差分法离散时间导数, 把关于轴的偏微分运动方程转化为常微分方程。在每一个时间增量下, 该常微分方程可直接积分。这类近似方法是对空间坐标积分, 而不是对时间坐标的积分, 根据转子系统的边界条件求得这些空间坐标积分。

本文将文献 [3] 的方法扩展用于分析非线性转子—支承系统的瞬态响应, 提出了“连续空间离散时间—Riccati 传递矩阵积分法”。实例计算了柔性转子—非同型挤压油膜阻尼器系统的瞬态和稳态响应, 并将结果与 Runge-Kutta 法的结果作比较。

二、传递矩阵瞬态分析法^[3]

一般地, 转子的偏微分运动方程可表示为:

$$DW(x, t) = \sum_{j=1}^2 A_j(x) \frac{\partial W(x, t)}{\partial t^j} - F(x, t) \quad (1)$$

式中, $W(x, t)$ 是截面 N 维状态列向量; $A_j(x)$ 是与空间坐标有关的 $N \times N$ 矩阵; $F(x, t)$ 是 N 维力列向量; $D(x)$ 是对空间坐标矩阵的线性微分算子。按照文献 [3], 使用稳定性较好的 Newmark 差分公式近似地表达方程 (1) 中的阻尼项和惯性项, 把时间导数离散化。Newmark 的积分格式为:

$$\dot{W}_{n+1} = (W_{n+1}/\beta\Delta t^2) - P_n; \quad \dot{W}_{n+1} = (\gamma/\beta\Delta t)W_{n+1} + Q_n \quad (2)$$

$$P_n = (W_n/\beta\Delta t^2) + (\dot{W}_n/\beta\Delta t) + (0.5\beta^{-1} - 1)\ddot{W}_n \quad (3)$$

$$\theta_n = -(\gamma/\beta\Delta t)W_n + \mathbb{I} - (\gamma/\beta)\mathbb{I}\dot{W}_n + \Delta t\mathbb{I} - (\gamma/2\beta)\mathbb{I}\ddot{W}_n$$

把(2)代入(1)得: $DW_{n+1}(x, t) - KW_{n+1} = R_n \quad (4)$

式中: $K = (\gamma/\beta\Delta t)A_1 + (1/\beta\Delta t^2)A_2$, $R_n = Q_nA_1 - P_nA_2 - F_{n+1}(x, t)$

方程 (4) 只含有对空间坐标的导数项。这就使转子系统的动力响应分析, 在每个时间步长

下,可象静力学问题那样来处理。这里 K 可以看作是弹性系数, R_n 可以看作是广义的外激励力。

积分方程 (4) 可得两站位间状态变量的传递关系。再用 Riccati 传递矩阵法^[4], 根据边界条件求得各个站位处的状态变量。

三、连续空间离散时间-Riccati 传递矩阵积分法

对线性转子系统, 方程 (4) 右端的广义激励力 R_n 是与状态变量无关的已知函数, 积分方程 (4) 可得两站位间状态向量的关系。但是, 对非线性转子系统中的非线性部件, 方程 (4) 右端的广义激励力 R_n 是状态变量的非线性函数, 方程 (4) 不可能积分成解析的形式。因而, 得不到两站位间状态向量的解析关系, 状态向量的传递将在这里中断, 不能再用 Riccati 法, 根据边界条件求出各个站位处的状态变量, 这就是问题所在。

因此, 对非线性站位, 其速度和加速度不用 Newmark 差分公式离散化, 并把位移、速度和非线性项当作待定已知量, 加速度作为传递变量, 可得该站位两端截面状态向量 $\{f | e\}^T$ 的传递关系。从而得到整个非线性转子系统各截面状态向量 $\{f | e\}^T$ 的传递关系。采用传递向量 $\{f | e\}^T$ 是为了提高本法的数值稳定性。

按 Riccati 法的要求^[5], 把每一截面的状态向量分块为 $W = \{f | e\}^T$ 。据 (4) 式可得:

$$\begin{Bmatrix} f \\ e \end{Bmatrix}^{j+1} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} f \\ e \end{Bmatrix}^j + \begin{Bmatrix} F_f \\ F_e \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中 j 和 $j+1$ 分别表示模型 j 和 $j+1$ 截面。因为通常材料的弹性模量 E 很大而 Δt 很小, 使得传递矩阵 u_{12} , u_{21} 与 u_{11} , u_{22} 处于不同的数量级, 而成病态。为了改进传递矩阵的数值特性, 将 (2) 式变形为:

$$W_{n+1} = -\beta \Delta t^2 W_{n+1}^{\circ\circ} + \beta \Delta t^2 P_n, \quad W_{n+1}^{\circ} = \gamma \Delta t W_{n+1}^{\circ\circ} + \gamma \Delta t P_n + Q_n \quad (6)$$

用 (6) 式, 可将 (5) 式变为:

$$\begin{Bmatrix} f \\ e \end{Bmatrix}^{j+1} = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} f \\ e \end{Bmatrix}^j + \begin{Bmatrix} F_f^* \\ F_e^* \end{Bmatrix}_j \quad (7)$$

式中传递矩阵元素是 $E \Delta t^2$ 的函数, 从而各元素处于同一数量级, 改进了传递矩阵的数值的特性。

在同一状态向量 $W^* = \{f | e\}^T$ 内, 即在 f 与 e 之间建立变换

$$\{f\}^j = \mathfrak{S}^* \{e\}^j + \{P^*\}_j \quad (8)$$

由 (7)、(8) 可得:

$$\{f\}^{j+1} = \mathfrak{S}^* \{e\}^{j+1} + \{P^*\}_{j+1} \quad (9)$$

$$\{e\}^j = \mathfrak{T}^* \{e\}^{j+1} + \{Q^*\}_j \quad (10)$$

$$\mathfrak{S}^* \{e\}_{j+1} = \{U_{11}^* S^* + U_{12}^*\} \{U_{21}^* S^* + U_{22}^*\}^{-1} \quad (11)$$

$$\{P^*\}_{j+1} = \{U_{11}^* P^* + F_f^*\}_j - \mathfrak{S}^* \{e\}_{j+1} \{U_{21}^* P^* + F_e^*\}_j \quad (12)$$

$$\mathfrak{T}^* \{e\} = \{U_{21}^* S^* + U_{22}^*\}^{-1}, \quad \{Q^*\}_j = -\mathfrak{T}^* \{e\} \{U_{21}^* P^* + F_e^*\}_j \quad (12)$$

利用 (9) ~ (12) 式并根据边界条件就可进行计算。

计算非线性是位移和速度的复杂函数的转子系统的瞬态响应时, 首先根据初位移、速度和加速度, 用 Taylor 级数预估含有非线性元件站位的下一时刻的位移和速度, 并求出非线性量。其次利用 Riccati 法, 求出该站位的加速度, 再用 Newmark 差分公式求得位移和速度。最后比较该站位的位移和速度与原预估值, 重复同样的过程直到收敛。

四、计算分析结果

考虑一个柔性转子- 非同心型挤压油膜阻尼器系统如图 1 所示。其无量纲参数为: 轴承参数 $B = 0.20$, 重力参数 $W = 0.10$, 质量比 $\lambda = 0.40$, 阻尼参数 $\xi = 0.05$ 。推导得适应于 *Riccati* 法的挤压油膜轴承和盘子处的点传递矩阵为:

$$\begin{aligned} \{F_f^*\}^T &= \{F_1, F_2, F_3, F_4\}, \quad \{F_e^*\}^T = \{0\}, \\ U_{11}^* &= U_{22}^* = E, \quad U_{21}^* = 0, \\ U_{12}^* &= \begin{bmatrix} I_T & 0 & I_P \omega \Delta t & 0 \\ 0 & -(m + C_D \Delta t) & 0 & 0 \\ -I_P \omega \Delta t & 0 & I_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(m + C_D \Delta t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

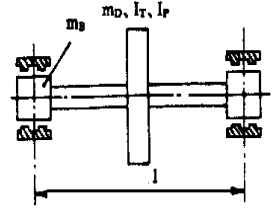


图 1 挤压油膜阻尼器

式中 U 为不平衡系数。

对挤压油膜轴承, 上式中取 $F_1 = F_3 = I_T = I_P = C_D = 0, m = m_B, F_2 = F_{y(n+1)}(y, \dot{y}, z, \dot{z}) + mBg, F_4 = F_{z(n+1)}(y, \dot{y}, z, \dot{z})$; 对盘子, 上式中取 $m = m_D, F_1 = I_P \omega \Delta t P_n(\delta) + Q_n(\delta), F_2 = -C_D \Delta t P_n(y) + Q_n(y) + mDe\omega^2 \cos \omega(n+1)\Delta t + mBg, F_3 = -I_P \omega \Delta t P_n(\theta) + Q_n(\theta), F_4 = -C_D \Delta t P_n(z) + Q_n(z) + mDe\omega^2 \sin \omega(n+1)\Delta t$ 。这里状态向量是 $\{M, U, N, V; \ddot{\theta}_y, \ddot{\delta}, \ddot{z}\}^T$, 各元素顺序代表截面的 y 方向弯矩、剪力, z 方向弯矩、剪力, y 方向角加速度、线性加速度、 z 方向角加速度、线性加速度; F_y, F_z 是非线性的挤压油膜力在 y, z 轴上的投影见文献 [6]; C_D 为圆盘处的线性阻尼系数, ω 为转子的转速, e 为盘子的偏心距。 E 为 4×4 单位矩阵。

适用 *Riccati* 法的无质量轴段场传递矩阵为:

$$\begin{aligned} \{F_f^*\} &= \{0\}, \quad U_{12}^* = 0, \quad \{F_e^*\}^T = \{P_n^j(\theta) - P_n^{j+1}(\theta), \\ (l/2)P_n^j(\theta) + P_n^j(y) - P_n^{j+1}(y), \quad P_n^j(\delta) - P_n^{j+1}(\delta), \quad (l/2)P_n^j(\delta) + P_n^j(z) - P_n^{j+1}(z)\}, \\ U_{11}^* &= U_{22}^{*T} = \begin{bmatrix} 1 & l/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U_{21}^* = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha l/4 & 0 & 0 \\ \alpha l/4 & \alpha^2/24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha l/4 \\ 0 & 0 & \alpha l/4 & \alpha^2/24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中 $\alpha = l / (2\beta \Delta t^2 EJ)$, J 为轴段截面惯性矩。

用本文的方法和 *Runge-Kutta* 法, 算得圆盘中心的瞬态和稳态轨迹, 如表 1、2 和图 2 所示, 其中 y, z 是盘子中心的无量纲坐标 (相对于阻尼器的间隙无量纲化), 实线是本文方法的结果, 虚线是 *Runge-Kutta* 法的结果, 两法的结果是吻合的, 这些验证了我们方法的正确性。此外, 我们还使用传递向量 $\{f | e\}^T$, 由 *Riccati* 法计算各站位的位移, 然后用 (2) 式计算速度和加速度的方法, 实例计算了上述系统的瞬态响应。结果表明, 积分是不稳定的。其原因分析如下:

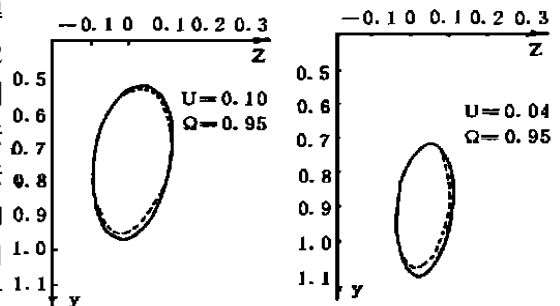


图 2 圆盘的稳态轨迹

表 1 两种方法瞬态结果的比较 (U= 0.10, Ω= 0.95)

时间	Runge- Kutta 法		本文的方法	
	y	z	y	z
. 001	. 200933E0	. 155228E0	. 198315E0	. 153159E0
. 006	. 416018E0	. 903238E- 1	. 418155E0	. 917703E- 1
. 011	. 782916E0	- . 232300E0	. 782131E0	- . 233110E0
. 016	. 594079E0	- . 120969E0	. 593329E0	- . 121282E0
. 021	. 885948E0	. 794727E- 1	. 888258E0	. 779376E- 1
. 050	. 537536E0	. 225652E- 1	. 537067E0	. 225685E- 1
. 055	. 960498E0	. 257685E- 1	. 961278E0	. 252519E- 1
. 060	. 635011E0	- . 644086E- 1	. 633797E0	. 646939E- 1
. 065	. 784468E0	. 102038E0	. 785308E0	. 101497E0
. 070	. 830233E0	- . 942163E- 1	. 829628E0	. 947191E- 1

表 2 两种方法瞬态结果的比较 (U= 0.04, Ω= 0.95)

时间	Runge- Kutta 法		本文的方法	
	y	z	y	z
. 001	. 186996E0	. 155546E0	. 184497E0	. 149633E0
. 006	. 493023E0	. 325700E- 1	. 494453E0	. 333923E- 1
. 011	. 793776E0	- . 155546E0	. 792571E0	- . 156641E0
. 016	. 701102E0	- . 887873E- 1	. 700201E0	- . 894551E- 1
. 021	. 887614E0	- . 113152E- 1	. 888917E0	- . 131649E- 1
. 050	. 732909E0	. 644391E- 2	. 731083E0	. 624747E- 2
. 055	. 103339E+ 1	. 592980E- 1	. 103507E+ 1	. 579324E- 1
. 060	. 862514E0	- . 362524E- 1	. 859463E0	- . 374315E- 1
. 065	. 869712E0	. 993982E- 1	. 871265E0	. 983800E- 1
. 070	. 102778E+ 1	- . 340695E- 1	. 102563E+ 1	- . 353116E- 1

首先给出盘子和无质量轴段关于 {f | e} ^T 的部分传递矩阵:

$$\mathcal{U}_{12}]=\left[\begin{array}{cccc} I_T/\beta \Delta t^2 & 0 & I_P \omega \mathcal{Y}/\beta \Delta t & 0 \\ 0 & -\left(m_D/\beta \Delta t^2+C_D \mathcal{Y}/\beta \Delta t\right) & 0 & 0 \\ -I_P \omega \mathcal{Y}/\beta \Delta t & 0 & I_T/\beta \Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(m_D/\beta \Delta t^2+C_D \mathcal{Y}/\beta \Delta t\right) \end{array}\right]$$

$$\mathcal{U}_{21}]=\left[\begin{array}{cccc} l/2 E J & l^2/8 E J & 0 & 0 \\ l^2/8 E J & l^3/48 E J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l/2 E J & l^2/8 E J \\ 0 & 0 & l^2/8 E J & l^3/48 E J \end{array}\right]$$

因为通常 E 很大而 Δt 很小, 所以 U_{12} 中的元素较 $O(1)$ 量级大得多, U_{21} 中的元素又较 $O(1)$ 量级小的多。关于 $\{f | e\}^T$ 的其它传递矩阵元素都在 $O(1)$ 量级上。

而关于 $\{f | e\}^{\circ\circ T}$ 的传递矩阵各元素都在 $O(1)$ 数量级上。因此, 采用传递向量 $\{f | e\}^{\circ\circ T}$ 可改进传递矩阵的数值特性。

另外, 使用 $\{f | e\}^T$ 时, 用 *Riccati* 法算出位移近似值 $\{e\}' = \{e\} + O(\epsilon)$, 代入 (2) 式得速度和加速度近似值 $\{e\}'$ 和 $\{e\}''$:

$$\{e\}' = \{e\} + O(\epsilon) \Delta t^{-1}, \quad \{e\}'' = \{e\}'' + O(\epsilon) \Delta t^{-2} \quad (13)$$

从 (13) 式知, 速度和加速度的误差被大大地扩大了。然后, 据此时的状态, 计算下一时刻的位移、速度和加速度。

使用 $\{f | e\}^{\circ\circ T}$ 时, 用 *Riccati* 法算出的是加速度近似值 $\{e\}'' = \{e\}'' + O(\epsilon)$, 代入 (6) 式得位移和速度近似值 $\{e\}'$ 和 $\{e\}$:

$$\{e\}' = \{e\}' + O(\epsilon) \Delta t^2, \quad \{e\} = \{e\} + O(\epsilon) \Delta t \quad (14)$$

从 (14) 式可知, 位移和速度的误差被大大地缩小了。然后据此时的状态, 计算下一时刻的加速度、位移和速度。

因此, 采用 $\{f | e\}^{\circ\circ T}$ 可提高本法的数值稳定性。

五、结 束 语

本文给出了分析非线性转子系统瞬态响应的一种新方法。理论分析和实例计算表明:

本法具有 *Riccati* 法的优点, 稳定性好, 传递矩阵阶数低, 可节省内存和机时, 便于应用, 其瞬态和稳态结果与 *Runge-Kutta* 法的结果相吻合。

使用传递向量 $\{f | e\}^T$ 时, 积分是不稳定的。这说明对非线性转子系统尽管采用 *Riccati* 法仍会出现数值不稳定现象。

参 考 文 献

- [1] Breed, D., "Time Transient Approach to the Solution Shaft Dynamic Problems", Ph. D. dissertation, Columbia University, N. Y., 1970.
- [2] Chu, F. H. and Pilkey, W. D., "Transient Analysis of Structural Members by the CSDT Riccati Transfer Matrix Method", Journal of Computers and Structures, Vol. 10, No. 4, 1979, pp. 599-612.
- [3] Chu, F. H. and Pilkey, W. D., "A Direct Integration Technique for the Transient Analysis of Rotating Shafts", Journal of Mechanical Design, ASME, Vol. 104, 1982, pp. 384-388.
- [4] Horner, G. C. and Pilkey, W. D., "The Riccati Transfer Matrix Method", Journal of Mechanical Design, ASME, Vol. 100, No. 2, 1978, pp. 297-302.
- [5] 王正, "Riccati 传递矩阵法在转子动力学中的应用", 中国航空学会发动机结构强度振动第二届学术会资料, 1982 年。
- [6] 陈松淇, "挤压油膜阻尼器的等效线性化", 西北工业大学学报, 第 4 卷第 2 期, 1986 年, pp. 137-146.

CYLINDRICAL CASE FATIGUE LIFE PREDICTION BY LOCAL STRAIN APPROACH

Shang Weijun, Liao Xuejun, Xu Tang

(*Nanjing Aeronautical Institute*)

ABSTRACT

A finite element elastic-plastic stress-strain analysis is completed for the cylindrical case with a hole. According to the stress-strain analysis the equivalent simulation members of thin plate with holes are designed to replace the cylindrical case in the fatigue life predictions and tests. The low cycle fatigue life predictions and tests have been accomplished with the local strain approach for the cylindrical cases and the equivalent simulation members. The results prove that the equivalent simulation is feasible. Finally the design criterion of the equivalent simulation members is found out. Therefore this work provides a basis for designing equivalent simulation members to replace the complex members in the low cycle fatigue life predictions and tests.

CSDT-RICCATI TRANSFER MATRIX INTEGRATION METHOD FOR TRANSIENT ANALYSIS OF NONLINEAR ROTOR-BEARING SYSTEMS

Gu Zhiping

(*Xian Institute of Technology*)

Chen Songqi

(*Northwestern Polytechnical University*)

ABSTRACT

Based on the work of Chu and Pilkey, a new direct integration method for the transient analysis of nonlinear rotor-bearing systems is proposed, called Continuous-Space Discrete-Time (CSDT) -Riccati transfer matrix integration method. In this method, the transfer vector $\{f; \ddot{e}\}^T$ rather than the previous $\{f; e\}^T$ is used with the aid of the Newmark generalized acceleration formulation; the accelerations of all stations, not the deflections, are computed by the Riccati transfer matrix method, in result the method's numerical instabilities are improved. The method sustains the advantages of the Riccati transfer matrix method, i. e., it is straightforward, easy to be understood, very convenient to use, quite stable, and capable to reduce the computation time and memory space significantly. So, it is especially fit to calculate the transient response of large complex rotor-bearing systems containing nonlinear elements. The method is illustrated and tested for the transient response of an unbalanced flexible rotor incorporating squeeze-film damper without centralizing spring. The obtained results agree well with those of the lumped mass method. For comparison an numerical example of the transient response of the above system has been also computed, using the transfer vector $\{f; e\}^T$. The obtained results show that such an integration is unstable. The reason of the instability is also analyzed in this paper.